

Sessione Esame di stato 2003

Prova scritta di Matematica

Liceo scientifico tradizionale

PROBLEMA 2

È assegnata la funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale.

- Determinare il suo dominio di derivabilità.
- Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x=1$.
- Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnarne il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) , dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.
- Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ , dall'asse x e dalla retta di equazione $x=1$.

PROBLEMA 2

a) La funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale si può scrivere come:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x^2+2m}, & \text{per } m > 0 \\ \frac{2x+1}{x^2}, & \text{per } m \leq 0 \end{cases}, f(x) \text{ è derivabile } \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & \text{per } m > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, & \text{per } m \leq 0 \end{cases}$$

b) Per $m \leq 0$ risulta: $f'(x) = \frac{2x^2 - 2x(2x+1)}{x^4} \Rightarrow f'(1) = -4 \neq 0$.

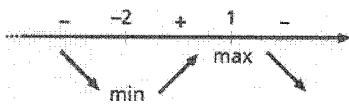
Per $m > 0$ risulta: $f'(x) = \frac{2(x^2+2m) - 2x(2x+1)}{(x^2+2m)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{4(m-1)}{(1+2m)^2} = 0 \Rightarrow m = 1$.

c) La funzione da studiare è: $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$. La funzione è definita su tutto \mathbb{R} . Le intersezioni con gli assi sono: $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ con l'asse delle ascisse, $B\left(0; \frac{1}{2}\right)$ con l'asse delle ordinate.

Si ha inoltre: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$. Il grafico ha l'asintoto orizzontale $y = 0$.

$$\text{La derivata prima risulta: } f'(x) = \frac{2(x^2+2) - (2x+1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-2(x^2+x-2)}{(x^2+2)^2} = \frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$$

$f'(x) \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 1$, quindi (vedi anche figura 5) si ha un minimo nel punto $m\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ ed un massimo nel punto $M(1; 1)$.

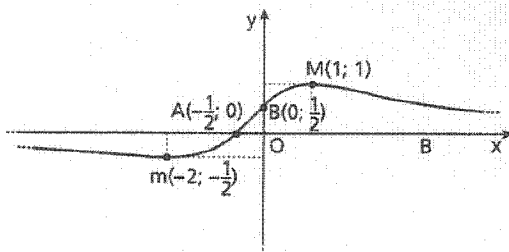


◀ Figura 5.

Studiando la derivata seconda si ottiene:

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{(2x+1)(x^2+2) - 2(x^2+x-2) \cdot 2x}{(x^2+2)^3} = \frac{2(2x^3+3x^2-12x-2)}{(x^2+2)^3}$$

$f''(x) \geq 0 \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 12x - 2 \geq 0$, l'equazione non si scompone con la regola di Ruffini, ma si osserva che, per il teorema fondamentale dell'algebra, ha al massimo tre radici, quindi tre flessi. I risultati ottenuti in precedenza per i limiti negli estremi del dominio ed i valori dei punti di massimo e di minimo permettono di determinare che i flessi devono essere almeno tre. In definitiva i flessi sono proprio tre. In conclusione si può tracciare il grafico della funzione (figura 6).



◀ Figura 6.

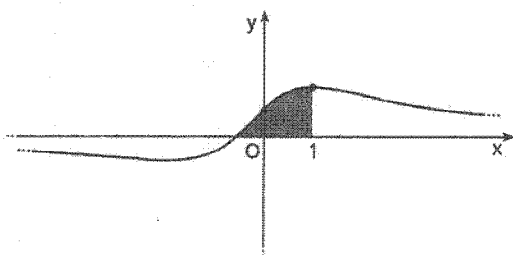
d) L'area richiesta (figura 7) si ottiene dall'integrale:

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2x+1}{x^2+2} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2x}{x^2+2} dx + \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2+2} dx =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2x}{x^2+2} dx + \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2x}{x^2+2} dx + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx,$$

ma $d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} dx$, allora

$$A = \left[\ln(x^2+2) \right]_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_{-\frac{1}{2}}^1 = \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = 0,963193.$$



◀ Figura 7.